



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA

Programación lineal I



CONCEPTOS PREVIOS

Definición (conjunto convexo).

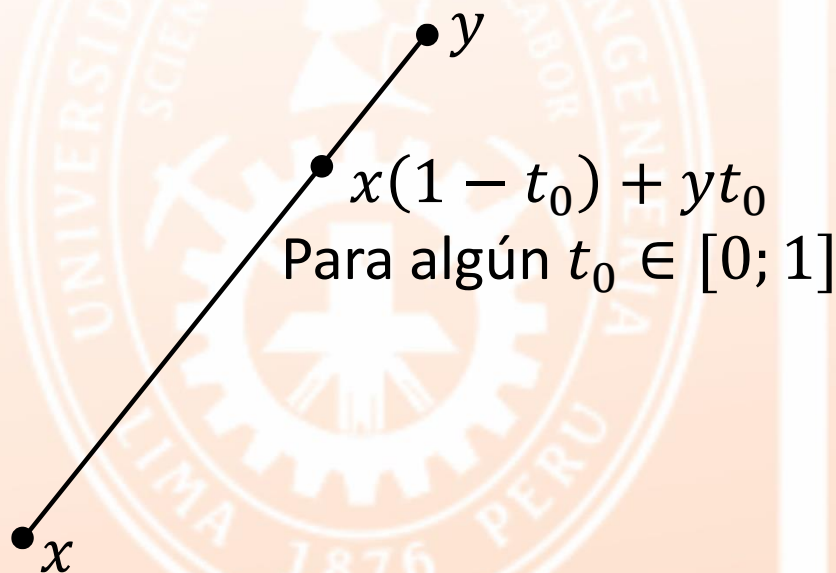
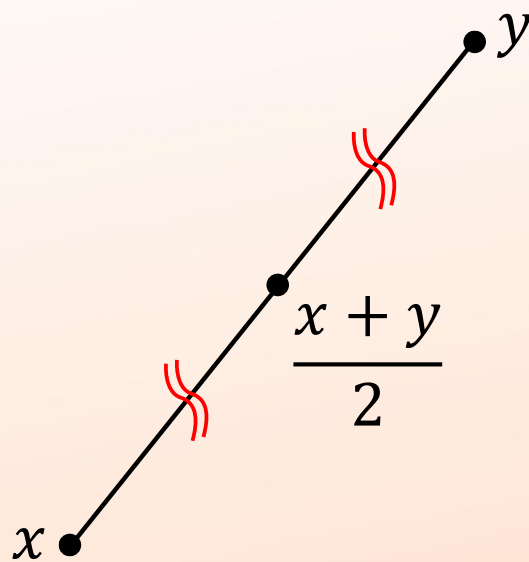
Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es un conjunto convexo si

$$\forall P, Q \in S, \overline{PQ} \subset S$$

Donde $\overline{PQ} = \{ (1 - t)P + tQ \mid t \in [0; 1] \}$

En otras palabras, si $S \subset \mathbb{R}^2$, entonces: $\forall x, y \in S, \forall t \in [0; 1] : x(1 - t) + yt \in S$

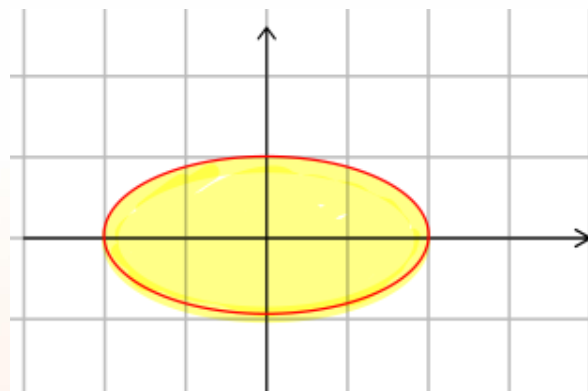
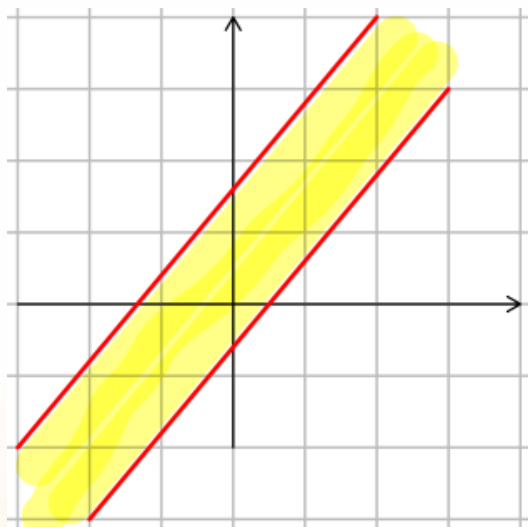
Gráficamente, por ejemplo:



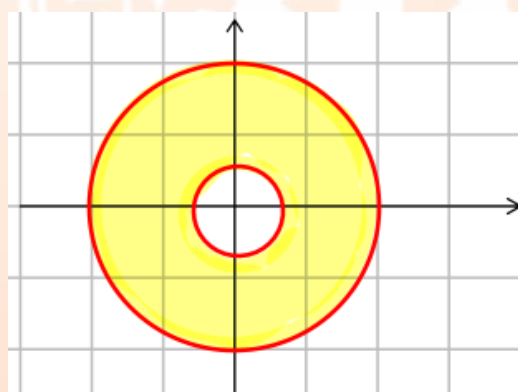
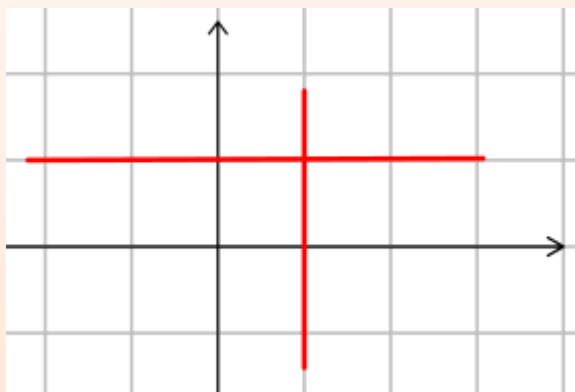
Ejemplos

Son conjuntos convexos: ϕ , $\{a\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$.

Adicionalmente gráficamente podemos tener también:



No son conjuntos convexos:



pre
UNI

Teorema

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}, ab \neq 0$. Los conjuntos de la forma

$$S = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \leq c \}$$

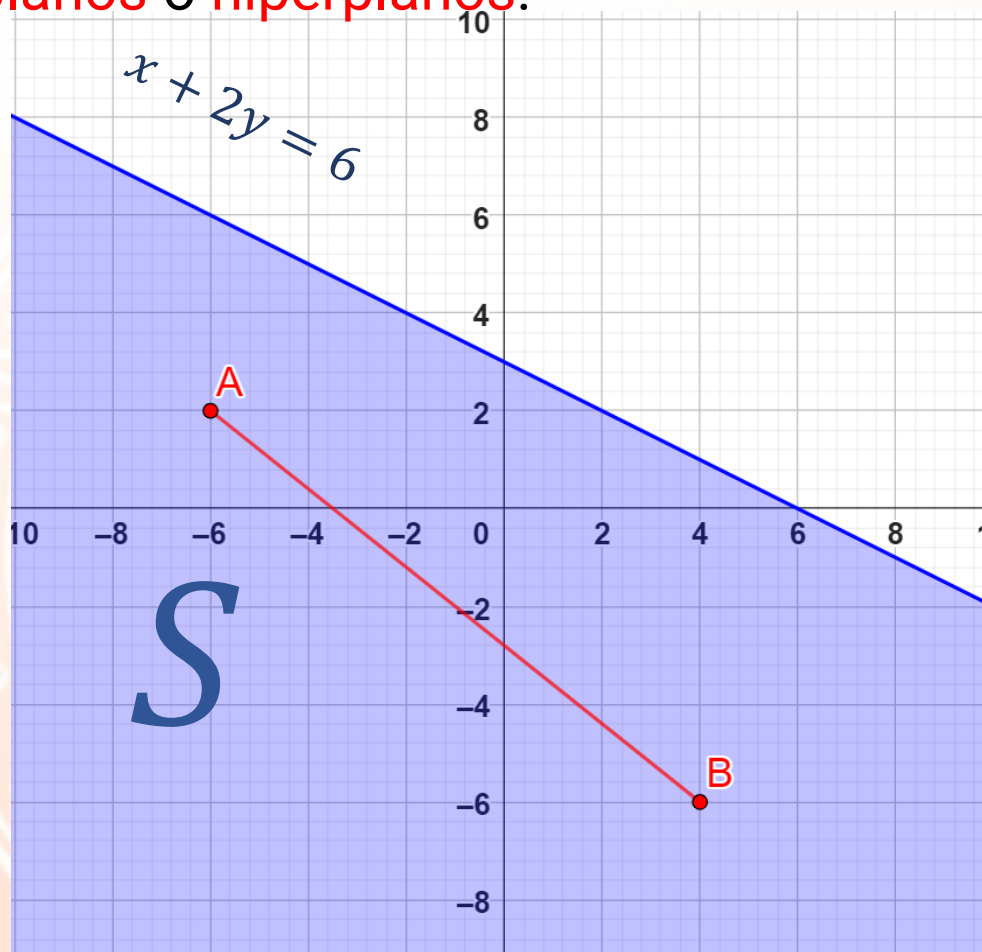
son convexos.

Llamaremos a estos conjuntos **semiplanos** o **hiperplanos**.

Ejemplo

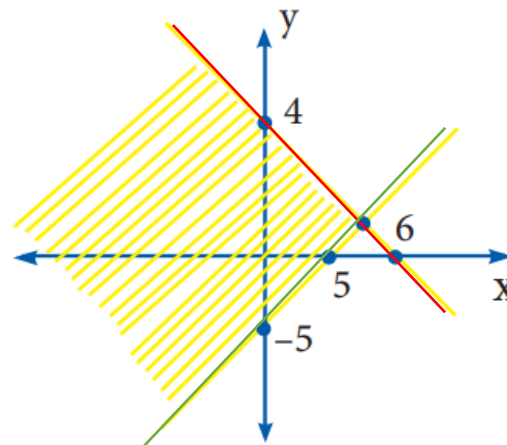
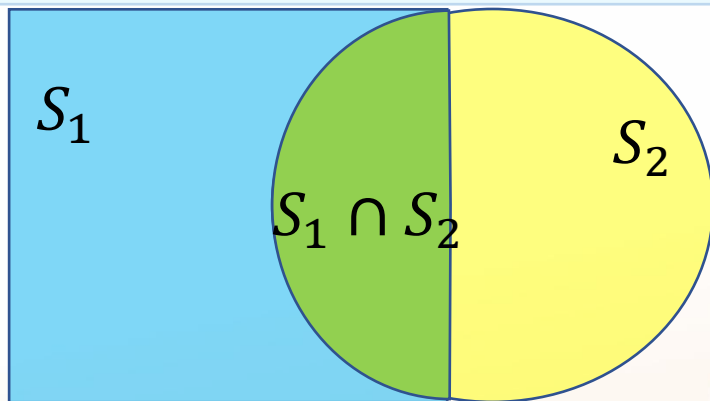
En la figura vemos el conjunto

$S = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \leq 6 \}$
que es un semiplano convexo.



Teorema.

Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos, la intersección $S_1 \cap S_2$ es un conjunto convexo.



Nota: La unión de conjuntos convexos no siempre es un conjunto convexo, como por ejemplo $\{2\}$ y $\{4\}$ son convexos, pero $\{2\} \cup \{4\}$ no lo es.

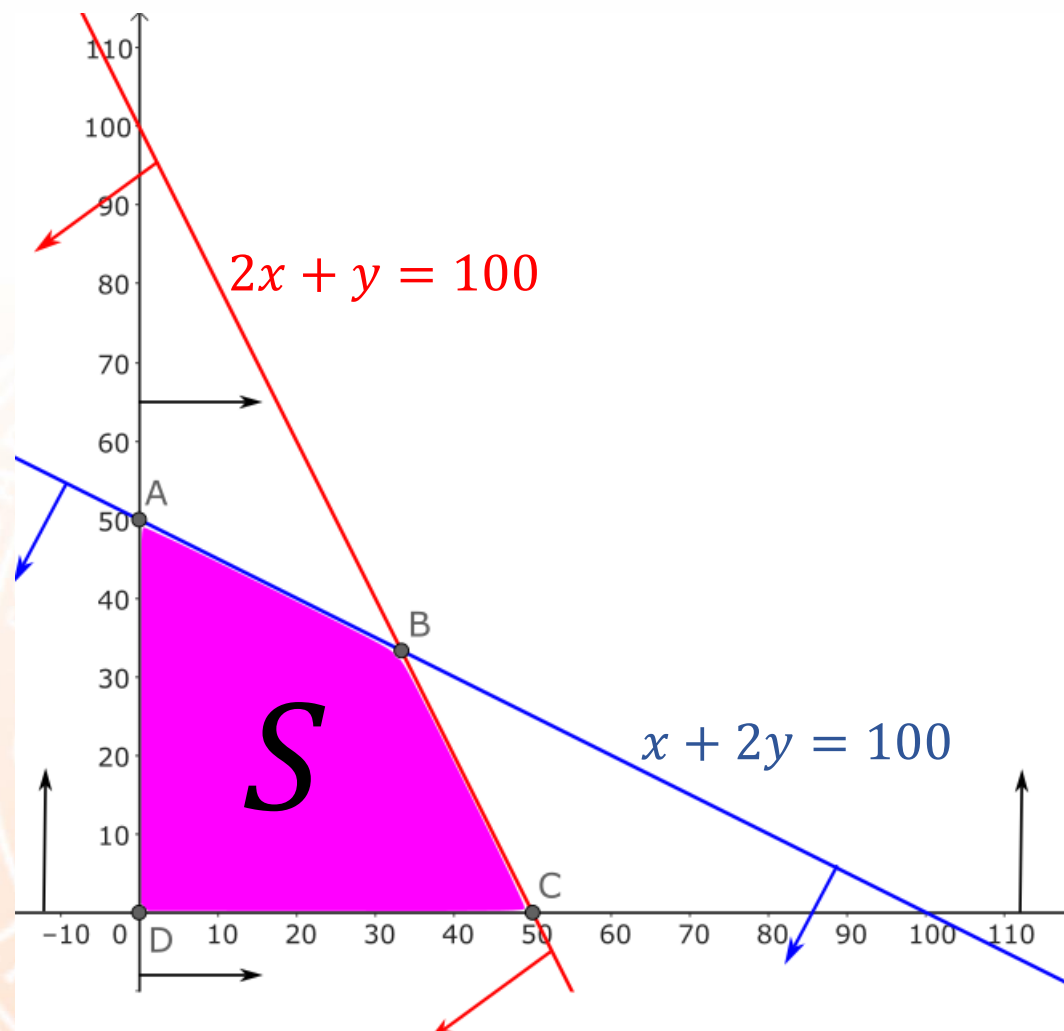
Ejemplo:

Sea S el conjunto formado por

$$S : \begin{cases} 2x + y \leq 100 \rightarrow S_1 \\ x + 2y \leq 100 \rightarrow S_2 \\ x \geq 0 \rightarrow S_3 \\ y \geq 0 \rightarrow S_4 \end{cases}$$

es un conjunto convexo

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$$



Problema de programación lineal (PPL)

Un PPL consiste en maximizar o minimizar una función de dos variables de la forma

$$f(x, y) = mx + ny$$

Llamada función objetivo, donde $m, n \in \mathbb{R}$ y x, y son variables o también llamadas *variables de decisión*, las cuales están sujetas a ciertas restricciones finitas de la forma $ax + by \leq c$.

Problema típico de programación lineal.

$$\text{Max/Min: } f(x, y) = mx + ny$$

Sujeto a

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

Nótese que tanto la función objetivo como las restricciones son lineales.

El problema anterior, también lo podemos denotar como:

Max/min: dX

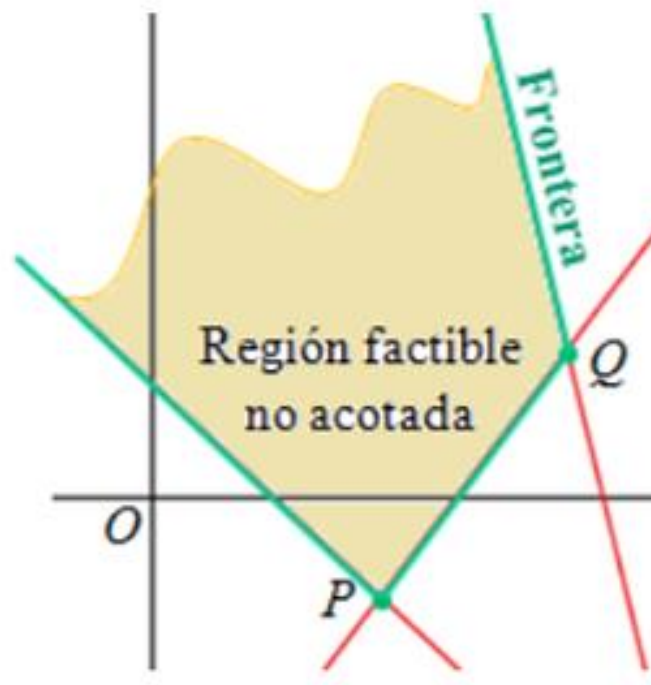
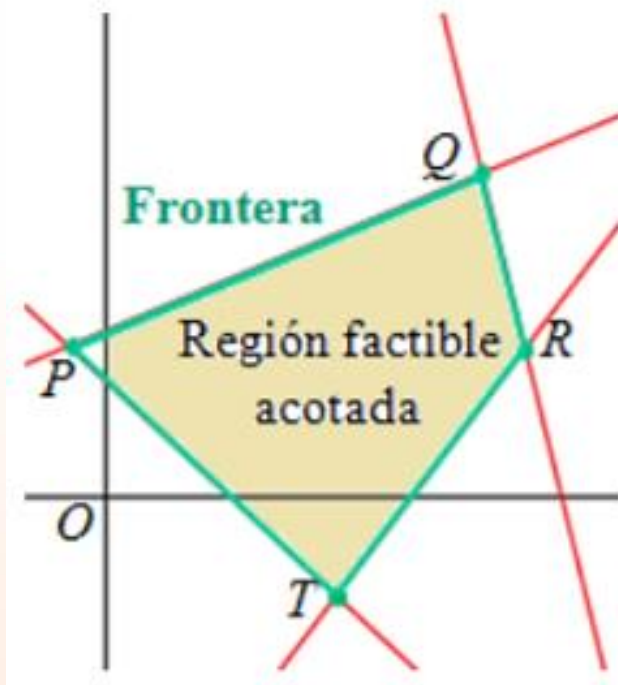
s. a $AX \leq b$

$$\text{Donde } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, d = (m \quad n) \text{ y } b = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

La cual se le conoce como la forma canónica de la programación lineal.

Región Factible

Graficando las restricciones de las variables, obtenemos la región factible, la cual está conformada por todos aquellos puntos que satisfacen las restricciones.



Nota.

1. La región factible que se obtiene de un PPL siempre es un conjunto convexo.
2. La región factible puede ser $\emptyset$.
3. Los vértices de la región admisible son llamados puntos extremos.

Siendo S la región factible de un PPL, podemos definir:

Solución factible:

Cada elemento $(x, y) \in S$ se le conoce como solución factible.

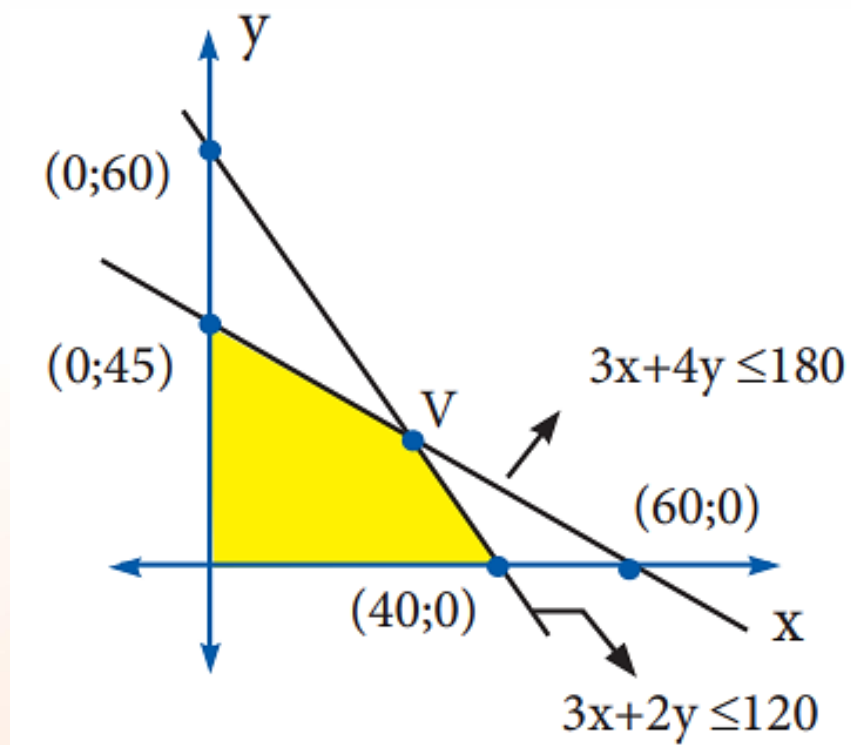
Solución óptima:

Sea $(x_0, y_0) \in S$, si (x_0, y_0) es la solución del PPL, entonces (x_0, y_0) se le llamará solución óptima.

Valor óptimo:

Sea $(x_0, y_0) \in S$ la solución óptima, $f(x_0, y_0)$ será llamado valor óptimo.

Las condiciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son llamadas condiciones de no negatividad, usualmente estas se imponen para problemas aplicativos.



Problema

Con respecto a la región factible mostrada, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Hay solamente tres puntos extremos.
- II. Tiene infinitas soluciones factibles.
- III. La región factible se ha formado con cuatro restricciones.

A) VFV B) FVF C) FVV D) FFF

Teorema:

Si la región admisible es acotada y no vacía, entonces el PPL tiene solución.

Teorema:

Si el PPL tiene solución, entonces la solución óptima se encuentra en uno de los vértices de la región admisible.

Nota Si la región admisible es no vacía y acotada, entonces

$$\min_{(x,y) \in S} f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_{(x,y) \in S} f(x,y)$$

donde (x_0, y_0) pertenece a la región admisible S .

Problema

Referente al PPL

$$\max_{(x,y) \in S} f(x,y) = 3x + 4y$$

$$S : \begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El PPL tiene al menos una solución óptima.
- II. Si B es la solución óptima, entonces $f(D) \leq f(B)$.
- III. El PPL puede tener dos soluciones óptimas.

A) VFV B) VVF C) FVV D) FFF

